At Right Angles
A Resource for School Mathematics

गणित में अनुमान

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University together with Community Mathematics Centre, Rishi Valley

गणित में अनुमान

"यह शिक्षित दिमाग़ की निशानी है कि वह परिशुद्धता की उस डिग्री के साथ आश्वस्त रहे, जिसे उस विषय की प्रकृति स्वीकार करती है और जब सत्य का केवल अनुमान सम्भव हो तो सटीकता की तलाश न करे।" - अरस्तू

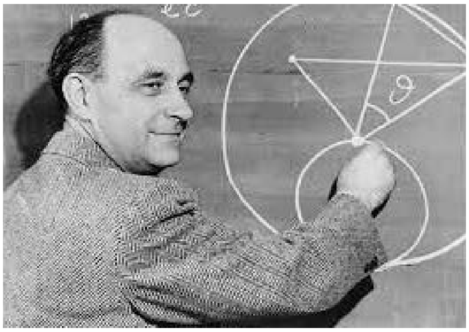
क्या गणित हमेशा परिशुद्धता और सटीकता के बारे में होता है? क्या गणित में अनुमान की कोई भूमिका होती है?

अनुमानित उत्तर दैनिक जीवन की अधिकांश स्थितियों में हमारे उद्देश्यों को पूरा करने के लिए व्यावहारिक रूप से पर्याप्त होते हैं। एक पर्याप्त उत्तर प्राप्त करने में त्वरितता के स्पष्ट लाभ हैं, उदाहरण के लिए होमवर्क के लिए समय योजना बनाने में, रेस्तरां में खाने की चीज़ें ऑर्डर करने में, एक शहर से दूसरे शहर पदयात्रा करने या ड्राइव करके जाने की योजना बनाने में, रसोई में (बिस्कुट रखने के लिए ज़रूरी जार के आकार को देखते हुए!)।

इस तथ्य से कोई इन्कार नहीं है कि अनुमान समय बचाने वाला दृष्टिकोण है। यह भौतिक अन्तर्ज्ञान (physical intuition) के निर्माण में उपयोगी है। यह त्रुटियों का पता लगाने और विविध माध्यमों से प्राप्त उत्तरों को दोबारा जाँचने का एक महत्त्वपूर्ण तरीक़ा भी है।

क्या इसका मतलब यह है कि अनुमान मुख्य रूप से दैनिक जीवन में उपयोग किया जाता है? गणितज्ञ और वैज्ञानिक अपने काम में अनुमान का उपयोग कैसे करते हैं?

"कोई भी वैज्ञानिक कभी भी वास्तविक दुनिया की समस्या का बिल्कुल ठीक-ठीक हल नहीं निकालता है, बल्कि जो भी उन्हें चाहिए उसकी सटीकता के लिए बस 'काफ़ी अच्छे' परिणाम को खोजता है।" खगोलीय पिण्डों की गतियों को निर्धारित करने का प्रयास करने वाले खगोलविद सटीक माप प्राप्त नहीं कर सकते हैं। इसी तरह कुछ भूमिगत वस्तुओं के द्रव्यमान और माप ज्ञात करने का प्रयास करने वाले भू-वैज्ञानिकों के लिए भी सटीक माप निकालना सम्भव नहीं होता। वैज्ञानिकों को उपलब्ध डेटा और मॉडलिंग तकनीकों का उपयोग करके कई मापों का अनुमान लगाना पड़ता है।



चित्र-1

भौतिक विज्ञानी एनरिको फर्मी आश्चर्यजनक सटीकता के साथ विभिन्न प्रकार के डेटा का अनुमान लगाने की अपनी क्षमता के लिए प्रसिद्ध थे ।

अनुमान क्या है?

यह किसी चीज़ के माप का अच्छा अन्दाज़ा लगाना है। लेकिन यह कोई बिना सोच-समझे लगाया जाने वाला अन्दाज़ा नहीं है। यह पूर्व अनुभव और अच्छे भौतिक तर्क (reasoning) का उपयोग करना है।

इस तर्क में सन्निकट मान प्राप्त करना (approximation), सन्निकटन करना (rounding off), महत्त्वपूर्ण आँकड़ों, स्केल गुणक (scale factors) आदि और बड़ी मात्रा में सहज समझ का उपयोग शामिल है। इसके परिणामस्वरूप एक ऐसे मान की गणना होती है जो सही उत्तर के काफ़ी क़रीब होता है।

क्या अनुमान लगाने का कोई एक सही तरीक़ा है? क्या अनुमान लगाना सिखाया जाना चाहिए?

हम सभी में अनुमान लगाने की जन्मजात क्षमता होती है। अगर कोई हमारी ओर गेंद फेंकता है, तो शायद इसके बारे में बिना सोचे हम यह जान लेते हैं कि गेंद को पकड़ने के लिए हमें अपने हाथों को कहाँ रखना होगा। अगर हमें खड़े होने के लिए एक पंक्ति चुनना हो तो, हम प्रत्येक पंक्ति में लोगों की संख्या का अनुमान लगाते हैं और उस पंक्ति में खड़े होते हैं जिसमें सबसे कम लोग होते हैं। या फिर हम यह यह देखते हैं कि कौन-सी पंक्ति में लोग तेज़ी-से आगे बढ़ रहे हैं। फिर भी, अधिक जटिलता वाले कई सन्दर्भों में अनुमान लगाने में अच्छा बनने के लिए हमें अनुमान कौशल का अभ्यास करने की आवश्यकता है।

अपने जीवन में व्यावहारिक रूप से हर दिन अनुमान के प्रश्नों से

हमारा सामना होता है। उदाहरण के लिए, क्या इस सूटकेस का वज़न 15 किलो से अधिक होगा? इस डाउनलोड में कितना समय लगेगा? पानी के इस जग से कितने गिलास भरे जा सकते हैं?

प्रश्न : बच्चों से अपने दैनिक जीवन से इस तरह के और उदाहरणों का पता लगाने को कहें।

यदि आप एक सिविल इंजीनियर होते तो आप काम की मात्रा और विभिन्न कार्यों पर होने वाले ख़र्च का विस्तृत अनुमान लगाते।

अनुमान सन्दर्भ पर आधारित होते हैं और इसके लिए उपयोग की जाने वाली पद्धतियाँ अलग-अलग होती हैं। हालाँकि, कुछ सामान्य तकनीकें हैं जिनका उपयोग अनुमान लगाने की किसी भी प्रक्रिया में किया जा सकता है। अनुमान लगाने की प्रक्रिया में महत्त्वपूर्ण चरों की समझ और इन चरों की परस्पर क्रिया भी शामिल होती है।

चर्चा : यह उन परिस्थितियों के उदाहरणों पर बच्चों के साथ विचार-मन्थन करने का एक दिलचस्प अभ्यास है जहाँ सटीक उत्तरों की आवश्यकता है और जहाँ अनुमान उद्देश्य की पूर्ति करेगा। उदाहरण के लिए, अस्पताल की एक नर्स को दवा के माप में सटीक होना चाहिए।

अख़बार की गतिविधि : बच्चे अख़बारों से संख्यात्मक जानकारी वाली कुछ ख़बरों की कटिंग कक्षा में ला सकते हैं ताकि चर्चा की जा सके कि किस में सटीक संख्याएँ शामिल हैं और कौन-से अनुमान हो सकते हैं।

अनुमान, स्कूली गणित का एक बेहद उपेक्षित हिस्सा है। अनुमान लगाने की क्षमता बच्चों की गणितीय सोच और समस्या समाधान के कौशलों को दर्शाने के लिए एक खिड़की की तरह काम करती है। यह एक उच्च स्तरीय कौशल है जिसके लिए बच्चों को संख्याओं की अवधारणात्मक समझ बनाने और मानसिक रूप से संख्याओं को कुशलतापूर्वक इस्तेमाल करने की आवश्यकता होती है। अनुमान कौशल विकसित करने में बच्चों की मदद करने के लिए शिक्षकों को शिक्षण और समस्या समाधान वाले सत्रों में अक्सर अनुमान का उपयोग करना चाहिए। ऐसे सवालों को कक्षा में लाने के लिए आपको विशेष प्रयास करने की आवश्यकता है क्योंकि हमारी पाठ्यपुस्तकों में इस पहलू पर पर्याप्त ध्यान नहीं दिया गया है।

अनुमान कौशल का कई विषयों में व्यापक उपयोग होता है और इन सभी विषय क्षेत्रों से एकीकृत करना अच्छा होगा।

गणित चर्चा : आप गणित में किसी भी विषय-क्षेत्र से अनुमान वाले प्रश्न ला सकते हैं। यह और भी अच्छा होगा अगर हम बच्चों से उनके अनुमानों के कारणों को सही ठहराने के लिए कह सकें। इससे कक्षा में गणित की बातें होंगी और एक ऐसी जगह बनेगी जहाँ साथियों से सीखना (peer learning) सम्भव है।

अनुमान के शिक्षण के दौरान शिक्षकों को जीवन से जुड़े उदाहरणों का उपयोग करना चाहिए ताकि बच्चे समस्या की ज़रूरतों के आधार पर अनुमान लगा सकें। उन्हें बच्चों द्वारा दिए जाने वाले अलग-अलग उत्तरों को स्वीकार करने के लिए भी तैयार होना चाहिए, जब तक कि वे तर्कसंगत हों। हो सकता है कि बच्चे कभी-कभी अपने पूर्व अनुभवों के चलते कुछ उत्तरों को पहले से जान लें। शिक्षकों को इस बारे में खुला होना चाहिए और उन उत्तरों को स्वीकार करना चाहिए। बच्चों को दैनिक जीवन में अनुमान के अपने व्यक्तिगत अनुभव साझा करने दें। आख़िरकार बच्चों को यह जानने की ज़रूरत है कि सटीक मान के क़रीब पहुँचने के लिए कब किस विधि का उपयोग करना है।



चित्र-2

यह ज़रूरी नहीं है कि अनुमान के सवालों को अलग-अलग अभ्यासों के रूप में दिया जाए। अक्सर हमें बच्चों से कुछ गणनाएँ करवाने की आवश्यकता होती है। उत्तर की तर्कसंगतता की जाँच के लिए वास्तविक गणना करने से पहले हम बच्चों को मोटेतौर पर अनुमान लगाने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं।

नोट : शिक्षक इस ओर बच्चों का ध्यान आकर्षित कर सकते हैं कि दो अंकों वाली संख्याओं या बड़ी संख्याओं से भाग देते समय वे जो अन्दाज़ा लगाते हैं, वही अनुमान है। इसी प्रकार, वर्गमूल की एल्गोरिद्म (जिससे बच्चे शायद उच्च प्राथमिक

विद्यालय में परिचित न हों) में भी अनुमान का उपयोग होता है।

अच्छे अनुमान कौशल का उपयोग समस्या समाधान के एक उपकरण के रूप में किया जा सकता है। इसके अलावा, उचित सन्निकटन किसी समस्या में दिए गए आँकड़ों से उभरने वाले पैटर्नों या उस समस्या की संरचना पर ध्यान केन्द्रित करने में मदद करने के लिए समस्या को सरल बना सकता है।

महत्त्वपूर्ण क्षेत्रों में अधिक या कमतर अनुमान लगाने से किसी भी स्थिति पर ज़बरदस्त प्रभाव पड़ता है। भारत द्वारा कोविड टीकों की अपनी उत्पादन क्षमता का अधिक आकलन करने से टीकों की उपलब्धता में कमी हो गई थी। सूक्ष्म या वृहत स्तरों पर बनाए जाने वाली बहुत सारी योजनाएँ विभिन्न चीज़ों के अनुमानों पर आधारित होती हैं।

इस लेख में मैंने अनुमान के कुछ महत्त्वपूर्ण कौशलों के साथ-साथ ऐसे विविध सन्दर्भों को साझा किया है जिनमें अनुमान के उपयोग की आवश्यकता होती है। साथ ही मैंने प्रसिद्ध नोबेल पुरस्कार विजेता एनरिको फर्मी द्वारा तैयार किए गए अनुमान से जुड़े खुले प्रश्नों (open-ended questions) को भी प्रस्तुत किया है जो बच्चों की सोच को चुनौती देते हैं।

अनुमान के कौशल

1. तुलना द्वारा अनुमान (शरीर की मापों के ज़रिए तुलना करना, किसी अन्य वस्तु से तुलना करना) लगाना
2. मानक लम्बाई, वज़न, आयतन की पूर्व समझ का उपयोग करना जो मापन के लिए बेंचमार्क के रूप में काम कर सकती है।
3. स्केलिंग गुणक या अनुपात का उपयोग करना
4. सन्निकटन करना
5. उच्चतम स्थानीय मान का उपयोग करना
6. सरल भिन्नों या दशमलवों को चुनना, आधा या चौथाई करके अनुमान लगाना
7. सरल आकृतियों के साथ मॉडलिंग करना
8. औसत का उपयोग करना
9. सन्निकटन के आधार पर उत्तर का समायोजन करना
10. प्रतिचयन (sampling) द्वारा अनुमान लगाना

ग़ैर-नियमित प्रश्नों (Non-routine questions) के लिए अनुमान की पद्धतियाँ

नोबेल पुरस्कार विजेता एनरिको फर्मी ने ऐसे प्रश्न पूछे जो खुले प्रश्न थे, जिन्हें हल करने के लिए संख्यात्मक तार्किकता की ज़रूरत थी और जिनमें आमतौर पर सीमित जानकारी होती थी। उनके प्रश्नों ने बच्चों को और भी प्रश्न पूछने और उत्तर के बजाय उत्तर खोजने की *प्रक्रिया* पर ध्यान केन्द्रित करने के लिए विवश किया।

उनके प्रश्न जिज्ञासा को बढ़ाते हैं और बच्चों को अधिक रचनात्मक रूप से सोचने के लिए प्रेरित करते हैं। इन प्रश्नों के उत्तरों का पता लगाने की प्रक्रिया के लिए बच्चों को विचार-मन्थन करने, विभिन्न दृष्टिकोणों पर चर्चा करने, आपस में बहस करने, ख़ामियों को खोजने और उन्हें सुधारने की आवश्यकता होती है।

यहाँ उनके कुछ प्रश्न बतौर उदाहरण दिए गए हैं : "पृथ्वी के समुद्र तटों पर रेत के कितने कण हैं?" "मानव शरीर में कितने परमाणु हैं?"

हम इस तरह के सवालों को कैसे हल कर सकते हैं? सबसे पहले हम प्रश्न से सम्बन्धित उन तथ्यों को लिखते हैं, जिन्हें हम पहले से जानते हैं। उत्तर का पता लगाने के लिए हम सम्भावित प्रक्रियाओं को देखते हैं। हम अपने उत्तर की तर्कसंगतता की जाँच करते हैं।

उदाहरण : मानव सिर पर कितने बाल होते हैं?

इस तरह का एक प्रश्न और भी कई प्रश्न उठाता है। पहला प्रश्न तो यही उठता है कि एक सिर के समान क्या है? एक गोला।

यदि सिर को एक गोला मान लें तो इसकी त्रिज्या क्या है? इसका कितना हिस्सा बालों से ढँका हुआ है? प्रति वर्ग सेंटीमीटर में बालों का घनत्व क्या है?

एक और प्रश्न देखिए। *"आप पूरे जीवन में कितने घण्टे सोएँगे?"*

पहले चरण के रूप में बच्चे इन समस्याओं में चरों को पहचानना शुरू करते हैं।

उन्हें वह जानकारी कैसे प्राप्त होगी जो उन्हें चाहिए? क्या वे

सम्पूर्ण सर्वेक्षण करेंगे? क्या वे एक प्रतिदर्श समूह (sample group) का परीक्षण करेंगे? क्या वे प्रासंगिक डेटा को इंटरनेट पर खोजेंगे?

इसके बाद वे उस सूत्र या बीजगणितीय व्यंजक को लिख सकते हैं जिसका उपयोग उन्होंने समस्या को हल करते समय किया था।

जो परिणाम उन्हें प्राप्त हुए हैं उनके आधार पर क्या वे कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं? क्या वे त्रुटियों के सम्भावित कारणों की पहचान कर सकते हैं?

फर्मी के सवालों को हल करने के प्रयास के लिए कक्षा को समूहों में विभाजित किया जा सकता है ताकि प्रत्येक बच्चा चर्चा में सक्रिय रूप से भाग ले सके। शिक्षक मार्गदर्शक की भूमिका निभाएँ और ज़रूरत पड़ने पर सहायता प्रदान करें।

1. तुलना द्वारा अनुमान

1.1 शरीर की मापों के साथ तुलना करके अनुमान लगाना

बच्चे अक्सर शारीरिक अंगों के रूपों में मात्रा को व्यक्त करते हैं, हालाँकि उनके ये अनुमान अक्सर अतिश्योक्तिपूर्ण होते हैं। प्राथमिक विद्यालय में बच्चे कक्षा में विभिन्न वस्तुओं की लम्बाई का अनुमान लगाने का अभ्यास इस तरह से वर्णन करके कर सकते हैं, जैसे कि " पायदान मेरे पैर से लम्बा है, यह मेरे पैर से दुगना है" या : "यह डेस्क मुझसे छोटी है, यह मेरी ऊँचाई की आधी है।"

उच्च प्राथमिक विद्यालय के बच्चे रूलर की लम्बाई या अपनी वास्तविक ऊँचाई की अपनी पूर्व समझ से अपने पहले के बयानों को संख्या की शब्दावली में व्यक्त करने में सक्षम होंगे। अब उनके विवरण अनुमानित आँकड़ों वाले होंगे।

उदाहरण के लिए, छत की ऊँचाई 4 मीटर होनी चाहिए। उनका तर्क हो सकता है "अगर हम में से दो बच्चे एक-दूसरे के ऊपर खड़े हों, तो आधे बच्चे के लिए और जगह होगी। प्रत्येक बच्चे की लम्बाई लगभग डेढ़ मीटर है।"



चित्र-3

1.2 किसी अन्य वस्तु के साथ तुलना करके अनुमान लगाना

यह एक सामान्य विधि है जिसका बहुत उपयोग होता है। इसमें मापी जाने वाली वस्तु की तुलना एक ऐसी वस्तु से की जाती है जिसके बारे में आपको पहले से जानकारी हो।

" पायदान लगभग 60 सेंटीमीटर लम्बा होना चाहिए क्योंकि दो लम्बे रूलर इस पर फिट हो सकते हैं।"

छत की ऊँचाई का अनुमान लगाने वाले पिछले उदाहरण के लिए एक और बच्चा छत के चार मीटर ऊँचे होने का अनुमान लगा सकता है। उसका तर्क हो सकता है, "दरवाज़े की ऊँचाई लगभग ढाई मीटर है और दरवाज़े के ऊपर हम आधा दरवाज़ा और फिट कर सकते हैं।"

चित्र कार्डों के साथ गतिविधि : बच्चों को ऐसे चित्र कार्ड दें जिसमें लोगों और इमारतों, लोगों के एक समूह, लोगों और ऊँची संरचनाओं जैसे इमारतों, खम्भों आदि को दिखाया गया हो।

बच्चों को चित्रों में दिखाए गए विभिन्न लोगों और अन्य संरचनाओं की ऊँचाइयों के बारे में बुद्धिमानी भरा अनुमान लगाने के लिए कहें। बच्चों को अपने अनुमानों को सही ठहराने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

सुनिश्चित करें कि वे परिप्रेक्ष्य को ध्यान में रखें और पास की वस्तुओं की तुलना उन वस्तुओं से करने की ग़लती न करें जो दूर हैं, जैसे कि पहाड़ या पृष्ठभूमि में दिए गए पेड़।

प्रश्न : उनसे पूछें : "यदि यह टेबल 2 फीट लम्बी है, तो बैंच कितनी लम्बी होगी?" "अगर यह पुस्तक 4 सेंटीमीटर मोटी है, तो शब्दकोश कितना मोटा होगा?"

यदि एक टेबल की चौड़ाई 7 फीट और लम्बाई 8 फीट हो, तो वह कैसा दिखेगा? इसके जवाब में बच्चों को बोर्ड पर दो या

तीन अलग-अलग आयत बनाने दें और सबसे बेहतर हल पर चर्चा करें।

चित्र-4 में क्या आप पेड़ की ऊँचाई का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र-4

खेल : अनुमान विशेषज्ञ!!

लपेटी हुई नायलॉन की रस्सी का एक रोल लें और बच्चों से रस्सी की कुल लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए कहें। सबसे नज़दीक का अनुमान लगाने वाला बच्चा विजेता होगा।



चित्र-5

2. मानक लम्बाई, वज़न, आयतन की पूर्व समझ का उपयोग करना जो मापन के लिए बेंचमार्क के रूप में काम कर सकती है।

हम सभी के पास अक्सर इस्तेमाल होने वाले कुछ मापों की सहज समझ होती है, जैसे कि 10 सेंटीमीटर, 30 सेंटीमीटर, 1 मीटर, 5 मिलीलीटर, 200 मिलीलीटर, 1 लीटर और शायद 1 किलो।

बच्चों को उन विभिन्न वस्तुओं की तस्वीरें दें जो आयतन और वज़न के अनुमान के लिए आमतौर पर उपयोग की जाती हैं।

जानकारी को दर्ज करने के लिए एक तालिका बनाएँ। अन्त में बच्चे वास्तविक आयतन, लम्बाई और वज़न को माप सकते हैं और वास्तविक आँकड़ों के साथ अपने अनुमानों की तुलना कर सकते हैं।

वस्तु	अनुमान	वास्तविक	अन्तर
ध्वज स्तम्भ	6 मीटर	6.25 मीटर	.25 मीटर

आइए, एक पिकनिक का उदाहरण लें। हमें भोजन, फल, पानी और कुछ गेंदों को ले जाने की आवश्यकता होगी।

इस क्रेट में पानी की कितनी बोतलें (मानक बोतलें) आ सकती हैं?



चित्र-6

क्या इस क्रेट में 6 खरबूजे आ जाएँगे?



चित्र-7

इसमें कितने सेब आ सकते हैं?

इस बाल्टी में बर्फ़ के कितने क्यूब्स आ सकते हैं?



चित्र-8

इस बाल्टी में कितनी टेनिस गेंदें आ सकती हैं?

प्रश्न पूछें : "यदि एक केले का वज़न 45 ग्राम हो तो एक अमरूद का वज़न क्या होगा?"

यदि मैं इस पिट्ठुबैग को सेबों से भरूँ तो इसका वज़न कितना होगा?



चित्र-9

मेरे स्कूल बैग में कितनी नोटबुक आ सकती हैं?

अगर मैं इसे पूरी तरह भर दूँ, तो मेरा बैग कितना भारी होगा?



चित्र-10

3. स्केल गुणक या अनुपात के ज़रिए अनुमान लगाना

अनुमान के सवालों को हल करने के लिए वृद्धि (enlargement) व कमी (reduction) करने की आवश्यकता होती है।

इसके लिए अनुपात और स्केल गुणक का उपयोग करना होता है। बच्चे मूल सवाल का उत्तर प्राप्त करने के लिए छोटे मानों वाले समतुल्य सवाल को हल करने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण : इन अलमारियों में कितनी पुस्तकें हैं?



चित्र-11

बच्चे देखेंगे कि अलमारियों में लगभग समान संख्या में पुस्तकें हैं। वे पुस्तकों की एक पंक्ति या अलमारी की एक फुट लम्बाई के लिए विस्तृत गणना करेंगे या अनुमान लगाएँगे।

फिर वे पुस्तकालय में पुस्तकों की कुल संख्या का अनुमान लगाने के लिए इस अनुमानित संख्या को ऐसी इकाइयों की संख्या से गुणा करेंगे।

यह बढ़ाने की प्रक्रिया है।

छोटी लम्बाइयों का उपयोग करके बड़ी लम्बाइयों का अनुमान लगाना :

लम्बाइयों या ऊँचाइयों को मापने के दौरान विभिन्न स्थितियों में इकाई अलग-अलग होती है। उदाहरण के लिए, अगर हमें एक बहुमंज़िला इमारत की ऊँचाई का अनुमान लगाना हो, तो हम मंज़िलों की संख्या को गिनेंगे और उसे एक मंज़िल की सामान्य ऊँचाई से गुणा करेंगे।

इमारत की एक मंज़िल की ऊँचाई का अनुमान पहले की तरह इमारत के पास खड़े किसी एक व्यक्ति की ऊँचाई या दरवाज़े की ऊँचाई से लगाया जा सकता है।

यह कम करने की प्रक्रिया है।

बड़ी लम्बाई से छोटी लम्बाई का अनुमान लगाना

कभी-कभी हम एक ढेर या गड्डी की कुल लम्बाई को मापते हैं और एक इकाई की लम्बाई निकालने के लिए उसे उपयुक्त संख्या से भाग दे देते है।



चित्र-12

मान लें कि हमें लकड़ी की एक शीट की मोटाई जानना है तो

हम ढेर की ऊँचाई को माप सकते हैं और उसे शीटों की संख्या से भाग दे सकते हैं।

सवालों के उदाहरण

1. एक ट्रेन टर्मिनल में 12 प्लेटफ़ॉर्म हैं। प्रत्येक प्लेटफ़ॉर्म से हर दिन लगभग 115 ट्रेनें जाती हैं। हर दिन टर्मिनल से होकर जाने वाली ट्रेनों की संख्या का अनुमान लगाएँ।
2. यदि जनसंख्या में वर्तमान दर (इंटरनेट से नवीनतम डेटा प्राप्त करें) से वृद्धि होती रहे, तो 2030 तक भारत की जनसंख्या क्या होगी? क्या हम मान सकते हैं कि वृद्धि दर समान रहेगी? क्या है जो इसे बदल सकता है?
3. स्कूल में हमें दूध दिया जाता है और हममें से प्रत्येक बच्चा दूध के साथ 2 चम्मच चीनी लेता है। हर महीने स्कूल में लगभग कितने किलोग्राम चीनी का उपयोग होता है?
4. रहीम 9.2 मीटर प्रति सेकंड की गति से दौड़ सकता है। अनुमान लगाइए कि 500 मीटर की दौड़ पूरी करने में उसे कितना समय लगेगा?

शिक्षक इन गणनाओं को करते समय उत्पन्न होने वाले गुणजों और गुणनखण्डों जैसी अन्य गणितीय अवधारणाओं की ओर बच्चों का ध्यान आकर्षित कर सकते हैं।

4. सन्निकटन करना

सवालों को सरल करने के लिए निकटतम दहाई, निकटतम सैकड़े तक सन्निकटन करने या दस की घातों का उपयोग किया जाता है।

सन्निकटन की मूल बातें शायद अब तक बच्चों को सिखा दी गई होंगी। उदाहरण के लिए, पूर्ण संख्याएँ जैसे कि 235, 236, 237, 238, 239 को 240 में सन्निकटित किया जाता है, वहीं 231, 232, 233, 234 को 230 (निकटतम दहाई) में सन्निकटित किया जाता है। अधिक स्पष्टता के लिए इसे संख्या रेखा पर दिखाया जा सकता है।

बच्चों को उत्तरों का अनुमान लगाने के लिए सन्निकटन का उपयोग करना सिखाया जाना चाहिए। वे काग़ज़ और पेंसिल या कैलकुलेटर से की गई गणनाओं की जाँच करने के लिए भी अनुमानित उत्तरों का उपयोग कर सकते हैं। यह उनके द्वारा की जा सकने वाली किन्हीं भी अटपटी त्रुटियों को उजागर करेगा।

बच्चों को यह भी समझना चाहिए कि सन्निकटन से संख्याओं का उपयोग करना आसान हो जाता है—लेकिन परिशुद्धता के नुक़सान की क़ीमत पर।

यदि हम बड़ी संख्याओं, जैसे कि हज़ार की संख्याओं, के साथ काम कर रहे हों, तो उत्तर का अनुमान लगाने के लिए निकटतम हज़ार में सन्निकटन करना आसान होता है। सन्निकटन का चुनाव आवश्यक परिशुद्धता के स्तर पर निर्भर करता है। निकट का सन्निकटन गणना को अधिक सटीक बनाता है। यदि हम सैकड़े को बनाए रखना चाहते हैं तो 2435 को 2400 में सन्निकटित किया जा सकता है, यदि ऐसा नहीं करना चाहते हैं तो इसे 2000 में सन्निकटित किया जा सकता है।

सामान्यत: अनुमान में प्रमुख राशियों (quantity) को सन्निकटित करना शामिल होता है ताकि उन्हें आसानी से कुशलतापूर्वक उपयोग किया जा सके। सन्निकटन गणना को आसान बनाता है। उदाहरण के लिए, अगर हमें 31 x 49 की गणना करनी हो, तो इसे 30 x 50 में सन्निकटन करना और 1500 का अनुमानित उत्तर प्राप्त करना सरल है। वास्तविक उत्तर 1519 है।

इसी प्रकार के सन्निकटन को जोड़, घटाना या भाग करने के लिए भी उपयोग किया जा सकता है।

- $83 \times 31 = ?$
- $39 + 97 = ?$
- $83 - 57 = ?$

उदाहरण : सूफ़ी ने कहा कि 523 × 34 करने से 1,77,820 प्राप्त होता है। क्या यह एक उचित जवाब है?

यदि बच्चे 500 × 30 के अनुमान का उपयोग करते हैं, तो वे 15,000 पर पहुँचेंगे और तुरन्त समझ जाएँगे कि स्थानीय मान के अनुसार यह जवाब ठीक नहीं है।

अगर हमें दशमलव संख्याओं के साथ काम करना हो तो हम संख्याओं को निकटतम पूर्ण संख्या में सन्निकटित करके शुरू करते हैं। 0.5 या उससे अधिक की दशमलव मान वाली संख्या को आगे की संख्या के लिए सन्निकटित (rounding up) किया जाता है (जैसे कि 1.8, 2 बन जाता है)। 0.5 से कम दशमलव मान वाली संख्या को पीछे की संख्या के लिए सन्निकटित (rounding down) किया जाता है। (जैसे कि 4.3, 4 में बदल जाता है)।

उदाहरण : यदि एक बड़े पार्सल का वज़न 1.89 किलोग्राम और एक छोटे पार्सल का वज़न 0.99 किलोग्राम हो, तो 10 बड़े पार्सल और 5 छोटे पार्सल का कुल अनुमानित वज़न क्या होगा?

बड़े पार्सल को 2 किलोग्राम और छोटे पार्सल को 1 किलोग्राम में सन्निकटित करने पर कुल वज़न 25 किलोग्राम होगा।

अन्तराल

बच्चे उत्तर के अन्तराल का निर्धारण करने के लिए भी सन्निकटन के सिद्धान्तों की अपनी समझ का उपयोग कर सकते हैं। यह दी गई संख्या के लिए निचले और ऊपरी स्तर के आँकड़ों को निर्धारित करता है।

उदाहरण

1. "एक बॉक्स में पिनों की संख्या को निकटतम पचास तक सन्निकटित किया गया है। यदि पिनों की संख्या 2650 दी गई हो तो बॉक्स में हो सकने वाली पिनों की सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या का पता लगाएँ।"

   इस अन्तराल की निचली सीमा 2625 होगी और उच्च सीमा 2674 होगी।

2. संख्या 11,200 को निकटतम सैकड़े तक सन्निकटित किया गया है। वास्तविक संख्या किस अन्तराल में होगी?
3. निकटतम दहाई तक सन्निकटित करने पर एक संख्या 400 हो जाती है। वास्तविक संख्या किस अन्तराल में होगी?
4. रोहन एक त्वरित अनुमान लगाता है कि 72 किलोग्राम वज़न वाले कितने लोग 940 किलोग्राम की अधिकतम लोड चेतावनी वाली एक लिफ्ट में सुरक्षित रूप से आ सकते हैं। वह गणना में उपयोग की गई राशियों को सन्निकटित करके ऐसा करता है। उसका जवाब क्या था?

5. उच्चतम स्थानीय मान का उपयोग करना

जब हम राशियों को जोड़ते हैं या गुणा करते हैं तो हम उच्चतम स्थानीय मान का उपयोग करते हैं क्योंकि यह हमें कुल राशि का मोटा-मोटा अनुमान देता है। संख्याओं का अनुमान लगाने से स्थानीय मान की समझ पुख़्ता होती है। बच्चों को यह समझ आता है कि दो अंकों की संख्या के उत्तर में दहाई के अंकों का योगदान इकाई के अंकों की तुलना में अधिक महत्त्वपूर्ण होता है।

219 + 345 + 564 को 200 + 300 + 500 के रूप में जोड़ा जाएगा और इसलिए योग 1000 से ऊपर होगा।

2453 × 312 का अनुमानित मान क्या होगा?

इसे 2000 × 300 के रूप में लिया जाता है, जिसका गुणनफल 600000 होता है। शून्य की संख्या को सही रखा जाना चाहिए।

नीचे दिए गए जैसे प्रश्न को हल करने का प्रयास आप कैसे करेंगे?

53687 + 8365 + 1638 + 28 के सन्निकटित उत्तर का अनुमान लगाएँ।

उदाहरण : फ़ोन द्वारा ली गई एक फ़ोटो के लिए आवश्यक स्टोरेज स्पेस की औसत मात्रा 3940 केबी है। लैपटॉप पर उपलब्ध स्टोरेज स्पेस 217 जीबी है। इन संख्याओं को सन्निकटित करते हुए लैपटॉप पर संग्रहित फ़ोटो की संख्या का अनुमान लगाइए।

एक फ़ोटो के लिए स्पेस को 4000 केबी में सन्निकटित किया जा सकता है। सन्निकटित करके स्टोरेज स्पेस को 200 जीबी यानी कि 20,00,00,000 केबी के रूप में लिया जा सकता है। इसलिए संग्रहित तस्वीरों की संख्या 50,000 होगी!

6. सरल भिन्नों या दशमलवों का चुनाव करना, आधा या चौथाई करके अनुमान लगाना

भिन्न की अवधारणाओं की अच्छी समझ उपयुक्त भिन्नों का चयन करने और परिणाम को समायोजित करने में सहायक होती है।

उदाहरण : अगर हमें 4,100 के पाँच बटे आठवें भाग की गणना करनी हो, तो हम 1/2 को चुनेंगे क्योंकि यह 5/8 से थोड़ा कम है और 4000 के 1/2 भाग की गणना करेंगे, जो कि 2000 है। 1/8 के घटाए गए भिन्नात्मक भाग को समायोजित करने के लिए हम इसे 2000 के 1/4 भाग, यानी 500, से बढ़ा सकते हैं। हमारा अनुमान 2500 है। वास्तविक उत्तर 2562.5 है।

एक चौथाई और आधे भाग द्वारा अनुमान लगाना

इमारतों, पेड़ों और बिजली के खम्भों की ऊँचाइयों का अनुमान लगाना अक्सर मुश्किल होता है ऐसी स्थितियों में हम पास की वस्तुओं के साथ उनकी तुलना करते हैं और लम्बी संरचनाओं की ऊँचाइयों का अनुमान लगाने के लिए आधा और एक चौथाई करने की प्रक्रिया का उपयोग करते हैं। इस प्रक्रिया को नीचे दिए उदाहरणों में समझाया गया है।

उदाहरण : चित्र-13 में कुछ दूरी पर खड़ी एक गाड़ी लैम्पपोस्ट की ऊँचाई के आधे से भी कम ऊँचाई की प्रतीत होती है।

गाड़ी की ऊँचाई को मोटेतौर पर 9 फीट माना जा सकता है। लैम्पपोस्ट की ऊँचाई शायद 20 फीट के आस-पास होगी।

चित्र-14 में एक आदमी खम्भे के शीर्ष तक पहुँचने के लिए एक मचान पर खड़ा है। अगर हम खम्भे की ऊँचाई के एक चौथाई भाग की कल्पना करें, तो यह आदमी की ऊँचाई (लगभग छह फीट) के बराबर होगी।

खम्भे की ऊँचाई लगभग 25 फीट होनी चाहिए।



चित्र-13



चित्र-14

7. सरल आकृतियों के साथ मॉडलिंग करना

अनुमान लगाने के लिए जटिल या अनियमित आकृतियों को एक सरल आकृति के रूप में देखा जाता है।

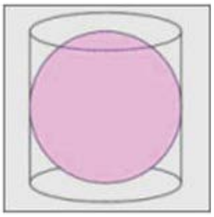
एक घनाभाकार डिब्बे में कितने गोलाकार केक आ सकते हैं?



चित्र-15

अनुमान लगाने के लिए हम गोलाकार केक को वर्गों के रूप में देखते हैं और गणना करते हैं।

एक कार्टन में कितने खरबूज़े आ सकते हैं? कार्टन में आ सकने वाले खरबूज़ों की संख्या का अनुमान लगाने के लिए हम एक उपयुक्त आकार के घन या बेलन को खरबूज़ के रूप में देखते हैं और मूल्यांकन करते हैं कि इस तरह के कितने घन या बेलन कार्टन में आ सकते हैं।



चित्र-16

घन, घनाभ जैसी सरल आकृतियों का उपयोग करने से अनुमान लगाने की प्रक्रिया में मदद मिलती है।

8. औसत का उपयोग करना

(नोट : औसत ज़रूरी नहीं कि अंकगणितीय माध्य के बराबर हो।)

यहाँ पर स्कूल मेले में दस बच्चों द्वारा एकत्रित राशि के आँकड़े दिए गए हैं ।

55, 75, 60, 45, 85, 60, 65, 55, 55, 70

एकत्रित की गई राशि का अनुमानित योग क्या होगा?

हम देखते हैं कि आँकड़े 60 के औसत के आस-पास हैं। इसलिए योग $60 \times 10 = 600$ के आस-पास होगा।

9. नीचे या ऊपर की संख्या के लिए सन्निकटन करने के आधार पर उत्तर का समायोजन करना

अनुमान लगाते समय हम आँकड़ों का ऊपर या नीचे की संख्याओं के लिए सन्निकटन करते हैं। यह उत्तर को प्रभावित करता है और ऐसा करने से उत्पन्न होने वाली किसी भी बड़ी विसंगति को दूर करने के लिए हम गणना के बाद उत्तर को समायोजित करते हैं।

उदाहरण : $44 \times 41 = ?$

हम इसे 40×40 में सन्निकटन करने से गुणनफल के रूप में 1600 प्राप्त कर सकते हैं। लेकिन 44 को 40 के रूप में सन्निकटित किया गया है, इसलिए हम जवाब समायोजित करते हैं और इसे 1800 बनाते हैं।

10. प्रतिचयन द्वारा अनुमान लगाना

जीवविज्ञानियों द्वारा किसी विशेष क्षेत्र में प्रजातियों की संख्या का अनुमान लगाने के लिए उपयोग की जाने वाली एक तकनीक यादृच्छिक प्रतिचयन (random sampling) है। इसका उपयोग जनसंख्या के आकार का अनुमान लगाने के लिए किया जा सकता है। इस प्रक्रिया में कुछ छोटे क्षेत्रों में जीवों को गिना जाता है और इसके आधार पर पूरे क्षेत्र के जीवों की संख्या का अनुमान लगाया जाता है। यह वही प्रक्रिया है जिसका उपयोग हम "मानव सिर पर कितने बाल हैं?" जैसे सवाल का जवाब देने के लिए करते हैं।

एक जीवविज्ञानी ने तालाब का 50 लीटर पानी एकत्र किया और उसमें मच्छरों के 10 लार्वा गिने। यदि तालाब में पानी की कुल मात्रा 80,000 लीटर थी तो आप उस तालाब में कितने लार्वा होने का अनुमान लगाएँगे?

इस तकनीक में कुछ कठिनाइयाँ क्या हैं? इसकी सटीकता को क्या प्रभावित कर सकता है?

11. समय का अनुमान लगाना

समय के अनुमान का कौशल बच्चों और बड़ों सभी के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण हैं।

बच्चे सरल अनुमान के साथ शुरू कर सकते हैं, जैसे कि गणित के 10 सवालों को हल करने में कितना समय लगेगा?

हवाई अड्डे पर आप एक पंक्ति में तीसवें स्थान पर हैं। आपको कब तक इन्तज़ार करना होगा?

एक महीने में आप वीडियो गेम खेलने में कितने घण्टे बिताते हैं?

अक्सर समय का हमारा अनुमान ग़लत होता है क्योंकि हम दो महत्त्वपूर्ण तथ्यों को शामिल नहीं करते हैं।

- अतीत में इसी तरह के काम को करने में हमें कितना समय लगा?
- अप्रत्याशित देरी का अनुमान लगाना।

बच्चों को वास्तविक समय का अनुमान लगाने में मदद करें।

दूसरे चरण के रूप में, बच्चे विभिन्न विषयों में गृहकार्य करने में लगने वाले समय का अनुमान लगाना और ख़ुद के लिए एक समय योजना बनाना सीख सकते हैं।

विभिन्न विषयों से सम्बन्धित अनुमान की कुछ समस्याएँ

संख्याएँ

उदाहरण : आप घटाने के इस सवाल के उत्तर का अनुमान कैसे लगाएँगे? 217 - 96 - 46

200 में से आप 100 और 50 को घटा सकते हैं। आपके अनुमान के अनुसार 50 बचेंगे।

मोटेतौर पर 423 को 71 से कितनी भार भाग दिया जा सकता है?

123 का 23% क्या होगा?

√2021 कौन-सी दो पूर्ण संख्याओं के बीच स्थित है?

आप के अनुसार √(1250/10000) का अनुमानित मान क्या होगा?

यदि 7 शंकुओं की क़ीमत 280 रुपए हो, तो 100 शंकुओं की क़ीमत का सबसे उपयुक्त अनुमान क्या होगा?

√108 के लिए निम्नलिखित में से कौन-सा अनुमान सबसे उपयुक्त होगा?

8, 9, 10, 11, 12

भिन्न और दशमलव

- $\frac{91^2}{9.9} - \left(35 - \frac{7.4}{0.12}\right) = ?$
- $13 \times 0.2 = ?$
- $\frac{36}{0.6} = ?$
- $468 \times 7.9849 + 71 + 38 = ?$
- $42 \times \frac{21}{1.77} = ?$
- $304 \times \frac{0.736}{0.099} = ?$
- $0.31^2 = ?$

कोण

जब आप अपनी उँगलियों को फैलाते हैं तो उनके बीच बनने वाले कोणों के मापों का अनुमान लगाएँ। क्या यह सभी लोगों के लिए समान हैं?

अक्सर हम देखते हैं कि बच्चे चाँदे को ग़लत तरीक़े से पढ़ते हैं और अटपटे उत्तर देते हैं। अनुमान का इस्तेमाल करने से इस समस्या से काफ़ी हद तक बचा जा सकता है। घड़ी और वृत्ताकार भिन्न किट का उपयोग करने से कोणों का अनुमान लगाने की क्षमता बढ़ती है।

आदर्श रूप से यह प्राथमिक विद्यालय में होना चाहिए था।



चित्र-17

क्षेत्रमिति

धारिता या कुल क्षेत्रफल से सम्बन्धित अनुमान लम्बाई, चौड़ाई, परिधि और ऊँचाई के अनुमानों पर आधारित होते हैं।

दो समान आयताकार काग़ज़ लें। एक को लपेटकर छोटा सिलेंडर और दूसरे को लपेटकर बड़ा सिलेंडर बनाएँ। अनुमान लगाएँ कि इन दोनों में से किस में ज़्यादा पॉपकॉर्न आएँगे (यदि इनका आधार होता!)।

क्या आप एक पेड़ के द्रव्यमान का अनुमान लगा सकते हैं?

क्या आप एक पेड़ पर आमों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?



चित्र-18

निर्माण स्थल से निकले मलबे का एक ढेर **(चित्र-19)** है, जिसका निपटान किया जाना है। ढेर बीच में लगभग 6 फीट ऊँचा है और लगभग 9 फीट फैला हुआ है।

क्या एक छोटा ट्रक इस कचरे को ले जा सकता है?



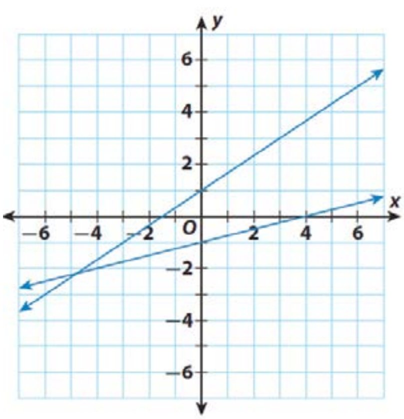
चित्र-19

आपके स्कूल की इमारत के लिए कितनी ईंटों का उपयोग किया गया होगा?



चित्र-20

ग्राफ़



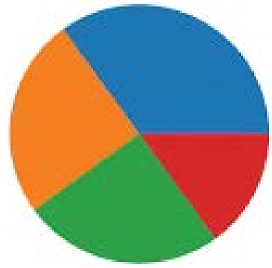
चित्र-21

उदाहरण : प्रत्येक रैखिक फलन (linear function) के लिए ग्राफ़ खींचकर हल का अनुमान लगाएँ। फिर इसे बीजगणितीय रूप से हल करें। अपने उत्तर की तर्कसंगतता को सही ठहराने के लिए अपने अनुमान का उपयोग करें।

$x - 4y = 4$

$2x - 3y = -3$

उदाहरण : यहाँ पुस्तकालय में मौजूद विभिन्न प्रकार की पुस्तकों का एक पाई चार्ट दिया गया है। नीला हिस्सा कथा साहित्य, पीला क्लासिक, हरा सन्दर्भ किताबों और लाल हिस्सा विश्वकोश (encyclopaedia) को दर्शाता है।



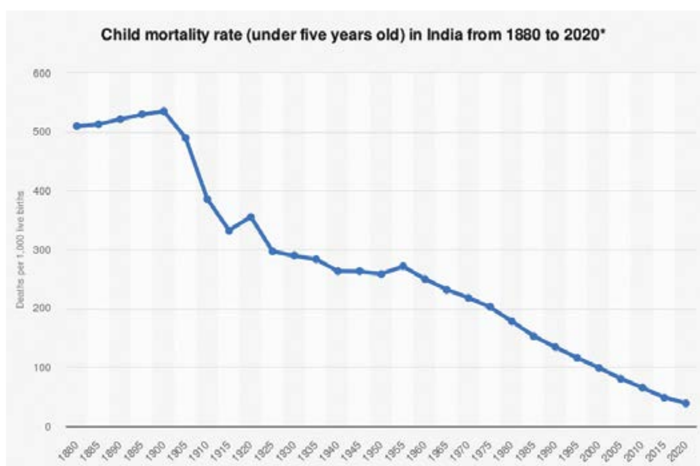
चित्र-22

यदि पुस्तकों की कुल संख्या 10,000 हो, तो क्या आप प्रत्येक प्रकार की पुस्तकों की संख्या का अनुमान लगा सकते हैं?

उदाहरण : आप एक माह में कितने शीतल पेय पीते हैं? क्या यह साल भर में बदलता है? क्या इतनी मात्रा में शीतल पेय का सेवन करना सुरक्षित है? पता करें।

उदाहरण : हम एक महीने में कितने कपड़े ख़रीदते हैं? आपका अनुमान क्या दिखाता है? क्या आप गणना कर सकते हैं कि हम हर साल कपड़ों पर कितना पैसा ख़र्च करते हैं?

उदाहरण : यहाँ एक समयावधि में भारत में बाल मृत्यु दर का एक ग्राफ़ दिया गया है। 2050 में भारत में बाल मृत्यु दर के बारे में आपका क्या अनुमान है?



चित्र-23

फर्मी प्रश्न बैंक

1. एक बॉलपॉइंट पैन कितनी दूरी तक चलेगा?
2. हमारे स्कूल में हर सप्ताह कितने काग़ज़ का उपयोग किया जाता है?
3. स्कूल कैंटीन में हर दिन कितना पैसा ख़र्च किया जाता है? हफ़्ते भर में? साल भर में?
4. एक वर्ष में पूरी कक्षा द्वारा खाई गई सभी चॉकलेट का उपयोग करके कितनी बड़ी चॉकलेट बनाई जा सकती है?
5. हर साल प्रत्येक परिवार द्वारा फेंके गए कचरे का वज़न कितना होता होगा?
6. एक हाथी के बराबर द्रव्यमान के लिए कितने बच्चों की आवश्यकता होगी?

आभार : मैं स्नेहा टाइटस और स्वाती सरकार की मदद और सुझावों के लिए उनका शुक्रिया अदा करना चाहूँगी।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली, सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्रप्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। पिछले कुछ वर्षों से वह शिक्षक-शिक्षा आउटरीच कार्य में संलग्न हैं। वर्तमान में वह पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर एससीईआरटी (आन्ध्रप्रदेश) के साथ काम कर रही हैं। 1990 के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इसे 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से भी जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथिमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics) जुलाई, 2021 में प्रकाशित Estimation in Mathematics का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं **कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही